Proposizioni logiche e operatori logici

Una proposizione logica è una proposizione per cui è possibile stabilire, in modo oggettivo ed univoco, un valore di verità vero o falso

Esempio di proposizioni logiche:

Roma sta nel Lazio

7 è un numero pari

Ambedue queste proposizioni sono proposizioni logiche valide, perché chiunque vada a valutarle dirà che la prima è vera e la seconda è falsa.

Invece la proposizione " la torta alle mele é buona" non è una proposizione logica poiché il suo valore di verità non si può stabilire in modo oggettivo; infatti a me non piace, ma il mio amico ne è ghiotto.

Spesso incontreremo proposizioni più complesse legate fra di loro con una congiunzione oppure una disgiunzione o una negazione, o con una combinazione di esse.

Come si fa a capire se una proposizione complessa è vera o falsa?

Bisogna applicare le regole derivanti dalle seguenti definizioni, in cui le proposizioni saranno indicate con le lettere minuscole dell'alfabeto.

Definizione di congiunzione

Date due proposizioni a e b, la loro congiunzione risulta vera se e solo se entrambe a e b sono vere.

In altri termini, basta che una proposizione della congiunzione sia falsa perché il risultato complessivo risulti falso

La congiunzione si può indicare con $a \wedge b$ oppure con $a \cdot b$ oppure con ab

Rappresentazione tabellare della congiunzione

a	b	ab
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definizione di disgiunzione

Date due proposizioni a e b, la loro disgiunzione risulta vera se almeno una fra le due proposizioni è vera.

In altri termini perché la disgiunzione sia falsa entrambe le proposizioni devono essere false

La disgiunzione si può indicare con $a + b$ oppure con $a \vee b$

Rappresentazione tabellare della disgiunzione

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Definizione di negazione

Data una proposizione a la sua negazione vera se a è falsa e viceversa

La negazione si indica con not(a) oppure con $\bar{a}$

Rappresentazione tabellare della negazione

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

Valgono le seguenti proprietà:

0 proposizione falsa   1 proposizione vera

	(C)	(D)
1) associativa	a(bc) = (ab)c = abc	a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c
2) commutativa	ab = ba	a+b = b+a
3) distributiva	a (b+c) = ab + ac	a + (bc) = (a+b)(a+c)
4) assorbimento	a (a+b) = a	a + (ab) = a
5) Elemento neutro	a · 1 = a	a + 0 = a
6) Dominanza	a · 0 = 0	a + 1 = 1
7) Doppia negazione	not(not (a)) = a	
8) Idempotenza	a a a … a = a	a + a + …+ a = a
9) Complemento	a. not(a) = 0	a + not(a) = 1
10) Leggi di De Morgan	not(ab) = not(a) + not(b)	not(a+b)= not(a) not(b)

Definizione

Due proposizioni sono equivalenti se hanno la stessa tabella di verità

Dimostriamo la validità della prima legge di De Morgan:

not(ab) = not(a) + not(b)

a	b	ab	$\overline{ab}$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}+\bar{b}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Colonne uguali $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ proposizioni equivalenti

Esercizi possibili:

dimostrazione della validità delle proprietà elencate in precedenza